The Coconut Problem

Su un isola deserta, cinque naufraghi e una scimmia raccolgono noci di cocco tutto il giorno e poi vanno a dormire d'accordo che le divideranno al mattino.
Durante la notte il primo uomo si sveglia e, non fidandosi degli altri, prende la sua quota: divide le noci di cocco in 5 parti uguali e dà alla scimmia la noce di cocco rimasta, poi nasconde la sua parte e torna a dormire.
Il secondo uomo si sveglia, prende il suo quinto dalla pila rimanente; anche lui ne trova una in più e la dà alla scimmia.
Ognuno degli altri tre uomimi fa lo stesso a turno.
Alla mattina nessuno ebbe il coraggio di dire che aveva già preso la propria parte durante la notte e come d'accordo divisero ancora una volta la pila senza però resto per la scimmia.
Trova il numero minimo di noci di cocco che doveva esserci all'inizio.

Soluzione Sia x_1 il numero di noci di cocco che prende il primo uomo dopo aver diviso la pila iniziale per 5 ed aver dato il resto 1 alla scimmia: il numero iniziale di noci di cocco era allora $X = 5x_1 + 1$ ed ora ne restano $4x_1$.
Il secondo uomo fa lo stesso prendendo x_2 noci di cocco con resto 1 dalle $4x_1$ rimanenti: $4x_1 = 5x_2 + 1$ lasciandone $4x_2$.
Sostituendo all'equazione di X abbiamo $X = 5 \cdot \left(\frac{5x_2+1}{4}\right) + 1 = \frac{25x_2+9}{4}$
Anche il terzo prende la sua quota x_3 di noci di cocco dalle $4x_2$ rimanenti, dando il resto 1 alla scimmia: $4x_2 = 5x_3 + 1$ e lasciandone $4x_3$.
L'equazione diventa $X = \frac{25}{4} \cdot \left(\frac{5x_3+1}{4}\right) + \frac{9}{4} = \frac{125x_3+61}{16}$
Come gli altri il quarto ne prende x_4 e dà il resto 1 alla scimmia: $4x_3 = 5x_4 + 1$ lasciandone $4x_4$.
Quindi $X = \frac{125}{16} \cdot \left(\frac{5x_4+1}{4}\right) + \frac{61}{16} = \frac{625x_4+369}{64}$
Infine il quinto uomo divide l'ultima volta per 5 le $4x_4$ noci di cocco rimanenti, prendendo il suo quinto x_5 di noci di cocco e dà la solita noce di cocco rimanente alla scimmia: $4x_4 = 5x_5 + 1$ lasciandone $4x_5$.
Inserendo anche quest'ultima equazione al posto di x_4 si ha $X = \frac{625}{64} \cdot \left(\frac{5x_5+1}{4}\right) + \frac{369}{64} = \frac{3125x_5+2101}{256}$
Riscriviamo l'ultima equazione come $256 \cdot X = 3125 \cdot x_5 + 2101$ che in algebra modulare risulta essere:

$$256 \cdot X \equiv 2101 \pmod{3125}$$

Per il buon comportamento delle congruenze con il prodotto e dato che $gcd(256, 3125) = 1$ posso scrivere $X \equiv \lambda 2101 \ (mod\ 3125)$, con $\lambda 256 + \mu 3125 = 1$
Dove λ viene calcolato con l'algoritmo esteso di Euclide:

r	**256**	**3125**	256	53	44	9	8	1	0
q	—	—	0	12	4	1	4	1	8
λ	1	0	1	-12	49	-61	-293	**-354**	—
μ	0	1	0	1	-4	5	-24	**29**	—

$(-354) \cdot 256 + 29 * 3125 = 1$ quindi $X \equiv (-354) \cdot 1476 \ (mod\ 3125)$ cioè $X \equiv -743754 \ (mod\ 3125)$ semplificabile in:

$$X \equiv -4 \pmod{3125}$$

in quanto $743754 = 3125 \cdot 238 - 4$.
Le soluzioni sono nella forma $X = -4 + k \cdot 3125$ ma considerando che le noci di cocco reali sono positive la più piccola soluzione è **3121**

Verifica Il primo uomo divide le 3121 noci di cocco per 5, ne prende 624 e ne dà 1 alla scimmia.
Il secondo uomo divide le $3121 - 625 = 2496$ noci di cocco rimaste per 5, ne prende 499 e ne dà 1 alla scimmia.
Il terzo uomo divide le $2496 - 500 = 1996$ noci di cocco rimaste per 5, ne prende 399 e ne dà 1 alla scimmia.
Il quarto uomo divide le $1996 - 400 = 1596$ noci di cocco rimaste per 5, ne prende 319 e ne dà 1 alla scimmia.
Il quinto uomo divide le $1596 - 320 = 1276$ noci di cocco rimaste per 5, ne prende 255 e ne dà 1 alla scimmia.
Restano così $1276 - 256 = 1020$ noci di cocco che alla mattina possono essere ulteriormente divise per 5 ma questa volta senza il resto per la scimmia.