



Suppongo  $L=L(R)$  per regexp R. Dim che  $L=L(E)$  per e-NFA E con:  
 uno stato accettante, nessun arco entrante in  $q_0$ , nessun arco uscente dall'accettante.  
 Base: a)  $>0 \rightarrow e \rightarrow 0$  il linguaggio è  $\{e\}$  b)  $>0$  O il linguaggio è  $0$  e c)  $>0 \rightarrow a \rightarrow 0$  accetta la sola stringa a  $L=L(a)$   
 Induzione: 1)  $R \rightarrow S$  partendo da  $q_0$  posso andare con e o in R o in S quindi  $L(R) \cup L(S)$  2)  $R \rightarrow e \rightarrow S$  concatenazione  $L(R) \cup L(S)$  3)  $R^*$  (cappello)  $>0 \rightarrow e \rightarrow 0$  o  $<e \rightarrow 0$  o  $>e \rightarrow 0$  ma anche  $>0 \rightarrow e \rightarrow 0$  4) Le parentesi non cambiano il linguaggio (R)

**Pumping Lemma per Linguaggi:**

Sia L regolare. Allora esiste una costante n tale che, per ogni stringa w in L per la quale  $|w| \geq n$ , possiamo scomporre w in tre stringhe  $w=xyz$  in modo che:

- y!=e;
- $|xy| \leq n$ ;
- per ogni  $k \geq 0$  anche la stringa  $x(y^k)z$  appartiene a L.
- Dim: Supponiamo che L sia regolare. Allora  $L=L(A)$  per un certo DFA A con n stati.  $w=a_1a_2...a_m$  con  $m \geq n$ . Per  $i=0,1,...,n$  definiamo lo stato  $p_i$  come  $d(q_0, a_1a_2...a_i)$ . Per il principio della piccionaia, dato che ci sono solo n stati, gli  $n+1$  stati  $p_i$  per  $i=0,1,...,n$  non possono essere tutti distinti. Per ciò ci sono due interi distinti  $i, j$  con  $0 \leq i < j \leq n$  tali che  $p_i = p_j$  e possiamo scomporre  $w=xyz$ : 1)  $x=a_1a_2...a_i$  2)  $y=a_{i+1}...a_j$  3)  $z=a_{j+1}...a_m$   
 Se A riceve in input  $xy^kz$  per un  $k \geq 0$  Se  $k=0$  l'automa va da  $p_0$  a  $p_i$  con x e poi da  $p_j$  che è pi allo stato accettante quindi  $xz$  è in L. Se  $k>0$  va fino a  $p_i$  con x poi cicla k volte su  $p_i$  e va all'accettante con z. Quindi  $xy^kz$  appartiene a L.  
 Pumping Lemma come giocatori  
 1) sceglie L che vuole dim non reg.  
 2) sceglie n  
 1) w in L  $|w| \geq n$   
 2)  $w=xyz$  con  $y \neq e$  e  $|xy| \leq n$   
 1) vince se individua un k  $xy^kz \notin L$ .

**Proprietà linguaggi regolari**

Unione: se L e M sono regolari lo è anche LUM. Se sono regolari sono descritti da regexp  $L=L(R)$  e  $M=L(S)$  allora  $LUM=L(R+S)$  per definizione di + nelle regexp  
 Complemento: se L è regolare anche  $\bar{L}=\Sigma^* - L$  è regolare.  $L=L(A)$  per DFA A allora  $\bar{L}=L(B)$  con B costruito uguale ad A ma con gli stati accettanti diventati non accettanti e viceversa allora w è in L(B) sse è in Q-F cioè quando non è in L(A).  
 Intersezione: uso de Morgan L int M =  $\overline{(\bar{L} \cup \bar{M})}$  oppure costruisco un automa A che simuli A1 e Am, dove gli stati sono coppie di stati dei due automi e gli stati accettanti sse erano entrambi accettanti  
 A=(Q1 x Qm, Sigma, d, (q1,qm), F1 x Fm) e  $d((p,q),a)=(d(p,a),d(q,a))$  quindi A accetta solo se w è accettato sia da Am che da A1.  
 Differenza:  $L-M=L \cap \bar{M}$   
 Inversione: L definito da regexp E. Esiste una regexp  $E^*R$  tale che  $L(E^*R)=(L(E))^*R$ .  
 Chiusura: Base: E=e oppure 0 oppure a allora  $E^*R=E$   
 Induzione: 1)  $E=E1+E2$  allora  $E^*R=E1^*R+E2^*R$  2)  $E=E1E2$  allora  $E^*R=E2^*RE1^*R$  cioè  $(L(E1E2))^*R=L(E2^*RE1^*R)$  3)  $E=E1^*$  allora  $E^*R=(E1^*R)^*$  qualunque w in L(E) può essere scritta come  $w1w2...wn$  con  $w_i$  in L(E) idem per  $w^*R$  che è in  $L((E^*R)^*)$  con  $w^*R$  in  $L(E^*R)$  e viceversa.  
 Omomorfismo

**Verifica linguaggi:**

L è vuoto? Se nell'automa non esiste un cammino dallo stato iniziale ad uno accettante.  $O(n^2)$  Oppure con regexp  $O(n)$  sapendo che  $R=R1+R2$  è vuoto sse  $R1$  e  $R2$  sono vuoti,  $R=R1R2$  se almeno uno dei due è vuoto, se  $R=R1^*$  non è mai vuoto,  $R=(R1)$  sse  $R1$  è vuoto  
 Appartenenza a linguaggio: se L è rappresentato da DFA si simula l'elaborazione e se accetta w è in L  $O(n)$  Se la rappresentazione è diversa si traduce in DFA in tempo  $O(n^2)$  con NFA con s stati e  $|w|=n$ .  
 L è non vuoto sse FA accetta almeno una stringa di lunghezza  $<n \leq |L(M)| < \infty$  perché w in L(M)  
 $[=>]$  sia w in L(M) corta quanto la più corta stringa in L(M). Per PL deve essere  $|w| < n$  perché se fosse  $|w| \geq n$  allora  $w=xyz$  con  $|xy| < n$  e  $y \neq e$  e  $xy^kz$  in L per ogni k, se  $k=0$  allora  $xz$  in L allora  $|xz| < |w|$   
 L è infinito? FA accetta stringa di lunghezza compresa tra n e  $2n$   $[<=]$  w in L, per PL  $xy^kz$  in L è un insieme infinito di stringhe.  $[=>]$  L infinito  $\Rightarrow$  esiste w in L  $|w| \geq n$  1)  $|w| \leq 2n$  ok 2)  $|w| \geq 2n$  ponendo w la più corta stringa con  $|w| \geq 2n$  Per PL si ha  $w=xyz$  e  $xy^kz$  in L, se  $k=0 \Rightarrow xz$  in L a) se  $|xz| < 2n$  b)  $|xz| < 2n$  si torna nel caso 1.

**Da inferenza ad albero:**

induzione su n passi per dedurre che w è in A  
 Base: un solo passo, esiste la produzione A->w, l'albero ha una sola foglia per ogni posizione di w e ha prodotto w e radice A, se  $w=e$  l'albero ha una sola foglia etichettata e, lecito.  
 Induzione: suppongo di aver dedotto che w è in A dopo n-1 passi di inferenza e che l'enunciato sia valido per tutte le stringhe x e variabili B tali che l'appartenenza di x in B si deduca in n o meno passi. Considero l'ultimo passo dell'inferenza di w in A che impiega la produzione A->X1X2...Xk dove  $w=w1w2...wk$  se  $X_i$  è un terminale allora  $w_i=X_i$ , se  $X_i$  è una variabile allora  $w_i$  è stata già dedotta da  $X_i$  quindi esiste un albero sintattico con prodotto  $w_i$  e radice  $X_i$ . Costruiamo poi un albero con radice A e prodotto w, i figli di A sono gli  $X_i$ , ciascuna  $X_i$  diventa radice di un sottoalbero con prodotto  $w_i$ . Se è terminale ho albero banale con un solo nodo  $X_i$  e una sola foglia  $w_i$ , altrimenti ipotesi induttiva. Quindi il prodotto totale è la concatenazione dei prodotti dei sottoalberi  $X_i$  da sinistra a destra  $w1w2...wk=w$  CVD

**Da albero a derivazione:** per induzione su altezza dell'albero. Base: altezza 1, radice A figli che formano w A->w deve essere una produzione quindi A=>w è derivazione di un solo passo di w da A.  
 Induzione: albero di altezza n>1. Radice A e figli  $X1X2...Xk$  con  $X_i$  terminale allora  $w_i$  è stringa formata da  $X_i$  oppure variabile cioè radice di un sottoalbero con prodotto fatto di terminali  $w_i$  di altezza <n quindi esiste una derivazione sinistra  $X_i \Rightarrow^* w_i$ .  
 $W=w1w2...wk$ . Costruisco  $A \Rightarrow X1X2...Xk$  e per ogni i ho  $A \Rightarrow w1w2...wiXi+1Xi+2...Xk$  e per induzione su i: base  $i=0$  x ipotesi  $A \Rightarrow X1X2...Xk$ , per induzione vero che  $A \Rightarrow w1w2...wi-1XiXi+1...Xk$  e se  $X_i$  è terminale lo sostituisco con  $w_i$  e se  $X_i$  è variabile continuo con una derivazione di  $w_i$  da  $X_i$ . Quando  $i=k$  il risultato è una derivazione sinistra di w da A.CVD

**Da derivazione a inferenza:** sia G una CFG e supponiamo esista una derivazione  $A \Rightarrow^* w$  con w in  $T^*$ . Allora l'inferenza ricorsiva applicata a G determina che w è in A. Per induzione su lunghezza della derivazione. Base: formata da un unico passo allora A->w è una produzione e w è soli terminali.  
 Induzione: valido per n o meno passi.  $A \Rightarrow X1X2...Xk \Rightarrow^* w$  allora  $w=w1w2...wk$ . Se  $X_i$  è un terminale allora  $w_i=X_i$  Se  $X_i$  è una variabile  $X_i \Rightarrow^* w_i$  per ipotesi induttiva  $w_i$  è nel linguaggio di  $X_i$ .  
 Abbiamo quindi  $A \Rightarrow X1X2...Xk$  dove  $w_i=X_i$  oppure vale l'ipotesi induttiva. Nella successiva iterazione di inferenza si scopre che  $w1w2...wk$  è in A quindi w è in A. CVD

**PDA P(Q, Sigma, Tau, dn, q0, Z0) accettazione da stack vuoto a stato finale.**  
 Se  $L=N(Pn)$  per stack vuoto allora esiste un PDA  $Pf | L=L(Pf)$  stato finale. Nuovo simbolo X0 che non appartiene all'alfabeto di stack. X0 è sia simbolo iniziale di Pf sia un segnale che indica quando Pn ha svuotato lo stack. Quando Pf vede X0 sulla sommità sa che Pn vuoterebbe lo stack sullo stesso input.  
 Poi nuovo stato iniziale che inserisce Z0 all'inizio.  
 $>p0 \rightarrow e.X0.Z0X0 \rightarrow q0 \rightarrow ...Pn... \rightarrow w.X0 \rightarrow Pf$   
 $Pf=(Q \cup \{p0, pf\}, \Sigma, \tau, U \cup \{X0\}, d, p0, X0, \{pf\})$   
 $d(p0, e, X0) = \{(q0, Z0X0)\}$ ; per tutti gli stati q in Q, gli input a in Sigma o a=e, e i simboli di stack Y in Tau,  $d(q, a, Y)$  contiene tutte le coppie  $dn(q, a, Y)$ ;  $d(q, e, X0)$  contiene  $(pf, e)$  per ogni stato q in Q.  
 Dim w è in L(Pf) sse w è in L(Pn). [Se] Sappiamo che  $(q0, w.Z0) \xrightarrow{*} (q, e, e)$  per un q. Posso inserire X0 e avere  $(q0, w.Z0X0) \xrightarrow{*} (q, e, X0)$ . Pf contiene tutte le mosse di Pn quindi vale anche in Pf. Compongo con le mosse aggiunte  $(p0, w.X0) \xrightarrow{*} (q0, w.Z0X0) \xrightarrow{*} (q, e, X0) \xrightarrow{*} (pf, e, e)$ . E Pf accetta per stato finale.  
 [SoloSe] Dalle regole aggiunte: l'ultima usata se lo stack di Pf contiene solo X0 e la prima può essere usata solo al primo passo. Le intermedie sono uguali a Pn e X0 è

sempre in fondo allo stack. Se  $X_0$  fosse in cima la computazione finirebbe al passo successivo. Quindi  $(q_0, w, Z_0)^{-1} \cdot (q, e, e)$  cioè  $w$  è in  $N(P_n)$  CVD  
 Da stato finale a stack vuoto: Se  $L=L(Pf)$  allora esiste un PDA  $P_n | L=N(P_n)$ .  
 Sia  $P_n=(Q \cup \{p_0, p\}, \Sigma, \tau, U \cup \{X_0\}, \delta, p_0, X_0)$  con  $\delta(p_0, e, X_0)=\{(q_0, Z_0 X_0)\}$ ; per ogni stato  $q$  in  $Q$ , ogni simbolo  $a$  in  $\Sigma$  o  $a=e$  e ogni  $Y=\tau, \delta(q, a, Y)$  contiene tutte le coppie presenti in  $\delta(q, a, Y)$  cioè  $P_n$  simula  $P_f$ ; per tutti gli stati accettanti  $q$  in  $F$  e i simboli di stack  $Y$  in  $\tau$  (o  $Y=X_0$ )  $\delta(q, e, Y)$  contiene  $(p, e)$ ; per tutti i simboli di stack  $Y$  in  $\tau$  (o  $Y=X_0$ ),  $\delta(p, e, Y)=\{(p, e)\}$  giunto in  $p$   $P_n$  elimina ogni simbolo fino a vuotarlo.  
 $\tau \rightarrow p_0 \rightarrow e, X_0, Z_0 X_0 \rightarrow q_0 \rightarrow F \rightarrow F \rightarrow e, q, e \rightarrow p \rightarrow \text{loop } e, q, s/e$  con  $q, s$ , qualsiasi.  
 Dim  $w$  è in  $N(P_n)$  sse  $w$  è in  $L(Pf)$  [Se] Supponiamo  $(q_0, w, Z_0)^{-1} \cdot (q, e, \alpha)$  per stato accettante  $q$  e stringa di stack  $\alpha$ . Ogni transizione di  $P_f$  è una mossa di  $P_n$ , per tenere  $X_0$  sotto i simboli di stack  $(q_0, w, Z_0 X_0)^{-1} \cdot (q, e, \alpha X_0)$  allora in  $P_n$  vale  $(p_0, w, X_0)^{-1} \cdot (q_0, w, Z_0 X_0)^{-1} \cdot (q, e, \alpha X_0)^{-1} \cdot (p, e, e)$   $w$  è accettata da  $P_n$  per stack vuoto.  
 [SoloSe]  $P_n$  può vuotare lo stack solo entrando nello stato  $p$  perché in fondo allo stack c'è  $X_0$  e  $P_f$  non ha mosse per  $X_0$ . Ogni configurazione accettante è  $(p_0, w, X_0)^{-1} \cdot (q_0, w, Z_0 X_0)^{-1} \cdot (q, e, \alpha X_0)^{-1} \cdot (p, e, e)$  dove  $q$  è accettante di  $P_f$ . Poi tra le ID  $(q_0, w, Z_0 X_0)$  e  $(q, e, \alpha X_0)$  tutte le mosse sono di  $P_f$  quindi  $(q_0, w, Z_0)^{-1} \cdot (q, e, \alpha)$ . Cioè  $P_f$  accetta  $w$  per stato finale.

### CFL

Riconosciuto da PDA non deterministico perchè se è ambigua i DPDA non la riconoscono  
Sostituzione alfabeto  
 Unione: usando il teorema di sostituzione siano  $L_1$  e  $L_2$  due CFL, allora  $L_1 \cup L_2$  è il linguaggio  $s(L)$  dove  $L$  è il linguaggio  $\{1, 2\}$  ed  $s$  è la sostituzione definita da  $s(1)=L_1$  e  $s(2)=L_2$   
 Concatenazione:  $L_1 L_2$  è il linguaggio  $s(L)$  con  $L=\{1, 2\}$  e  $s$  come prima  
 Chiusura:  $L^*$  è il linguaggio  $\{1^i\}^*$  e  $s(1)=L_1$ , allora  $L_1^*=s(L_1)$ . Ugualmente  $L^*$   
 Omomorfismo:  $s$  la sostituzione che rimpiazza ogni simbolo  $a$  con il linguaggio formato dalla sola stringa  $h(a)$   $s(a)=h(a)$ . Allora  $h(L)=s(L)$   
 Inversione:  $G^R(V, T, P^R, S)$  con  $P^R$  insieme degli inversi delle produzioni in  $P$ , se  $A \rightarrow \alpha$  diventa  $A \rightarrow \alpha^R$ . Con induzione su lunghezza derivazioni  $L(G^R)=L^R$   
 Intersezione con linguaggio regolare: CFL rappresentato da automa a pila e  $L$  da FA. Eseguo in parallelo un DFA e un PDA (con l'AND finale) e ottengo un altro PDA  $P'=(Q \times Q, \Sigma, \tau, d, (q, q), Z_0, F \times F)$  con  $d((q, p), a)$  è l'insieme di coppie  $((r, s), y)$  tali che:  $s=d^k a(p, a)$  e  $(r, y)$  in  $dp(q, a, X)$ . Con induzione su mosse fatte dal PDA ho  $(q, w, Z_0)^{-1} \cdot (q, e, y)$  sse  $((q, p), w, Z_0)^{-1} \cdot ((p, e), y)$  dove  $p=d^k(p, a, w)$ . Quindi  $P'$  accetta  $w$  sse sia  $P$  sia  $A$  accettano cioè  $w$  è in  $L \cap R$   
 Differenza con linguaggio regolare  $L-R=L \setminus R$   
 $L$  non può essere CFL poiché  $L_1/L_2=(L_1 \cup L_2)$  e siccome non sono chiusi rispetto all'intersezione ma rispetto all'unione significa che non sono chiusi rispetto alla complementazione.  
L1-L2 può non essere CFL perchè  $\Sigma^*$  è CFL. Se  $L_1-L_2$  fosse CFL allora  $\Sigma^*-L$  è un CFL se lo è  $L$ . Ma per un'opportuna scelta di  $\Sigma$ ,  $\Sigma^*-L=L$  contraddizione.

**Teorema di Myhill-Nerode**: sono equivalenti 1)  $L$  contenuto in  $\Sigma^*$  + regolare 2)  $L$  è unione di qualche classe di equivalenza che sia invariante a destra e di indice finito 3) sia  $R$  definita per  $w, y$  in  $\Sigma^*$   $xRy$  sse per ogni  $z$  in  $\Sigma^*$  "xy in  $L$  e yz in  $L$ " o "xz in  $L$  e yz in  $L$ " allora  $R$  ha indice finito.  
 Corollario Esiste ed è unico un DFA con #stati minimo  
**PvsNP**

A si riduce a B  
 A  $\rightarrow$  B A non può essere più difficile di B, B può essere più difficile di A  
**Linguaggi ricorsivi**:  
 Complemento, intersezione, unione  
 Se  $L$  è RE e  $\bar{L}$  è RE  $L$  è ricorsivo  
 Se  $L$  non RE,  $\bar{L}$  è non RE  
 Se  $L$  è RE ma non ricorsivo,  $\bar{L}$  non RE  
 Se  $\bar{L}$  è RE ma non ricorsivo,  $L$  è non RE  
 $L_u = \{(M, w) | M \text{ accetta } w\}$  è RE ma non ricorsivo  
 dove  $M$  è una TM codificata e  $M$  accetta la stringa  $w$ .  
 Esiste una turing machine universale con 3 nastri 1.  $(M, w)$  2. per il codice del nastro simulato di  $M$  3. per lo stato di  $M$   
 U simula  $M$  su  $w$  e  $U$  accetta  $(M, w)$  sse  $M$  accetta  $w$  quindi  $L_u$  è RE.  
 Se  $L_u$  fosse anche ricorsivo lo sarebbe anche il suo complemento quindi esisterebbe una TM che accetta  $\bar{L}_u=L_d$ . Assurdo.  
 $L_u$  è RE  
 $L_d = \{ \langle w \rangle | w \text{ non è in } L(M) \}$  è non RE  $w_j = j$ -esima parola in ordine canonico su  $(0+1)^*$   
 $M_i = TM$  avente come codifica la parola  $i$ -esima in ordine canonico.  $(i, j)=1$  se  $TM$  accetta  $w_j$ , 0 altrimenti.  $L_d$  complemento la diagonale.  
 Se  $L=L_1 \cup L_2$  è regolare  $\Rightarrow L_1$  e  $L_2$  sono regolari. FALSO:  $L_1$  non regolare,  $L_2 = \Sigma^* \Rightarrow L_2$  regolare.  
 $L_1$  non regolare,  $L_2$  non regolare  $\Rightarrow L_1 \cap L_2$  è regolare. Dipende:  $L_1 \cap \emptyset$  è regolare  
 $L_1 / \Sigma^*$  no.  
**PMD**  
 La  $f(i)$  è la dimensione del più lungo prefisso-suffisso scorrendo  $x$  con indice  $i$   
 Aabaa  
 0 1 0 1 2  
 a  
 AA  
 aab  
 AabA  
 AAbAA  
 $f(1)=0$   
 ho  $f(1) \dots f(j)$  devo calcolare  $f(j+1)$   
 $b_{j+1} = b_i + 1 \rightarrow f(j+1) = f(i) + 1$   
 $b_{j+1} = b_i + 1 \rightarrow$  riallineamento  
 Pseudocodice:  
 $f(1)=0$   
 for  $j=2$  to  $n$   
 $i=f(j-1)$   
 while  $(b_j > b_{i+1} \text{ and } i > 0)$  do  
 $i=f(i)$   
 if  $(b[j] < b[i+1] \text{ and } i=0)$  then  $\backslash \text{match}$  di  $j+1$  caratteri  
 $f(j)=0$   
 else  $f(j)=i+1$

Una stringa è libera da quadrato se  $w=xyxz$  con  $y=e$

### DIM TM

Se un linguaggio  $L$  è riconosciuto da una TM  $M$  allora esiste una TM  $M'$  che genera tutte e sole le stringhe di  $L$ .  
 Dim: un linguaggio riconosciuto da una TM è RE. E non è richiesto che la TM si fermi in tempo finito.  
 Per evitare che la computazione di  $w$  sia infinita metto in  $M'$  un generatore di coppie  $G_1(i, j)$  ordinate.  
 Usando l'output di  $G_1$  simulo  $w$  su  $M$  per  $j$  passi riuscendo a costruire il generatore  $M'$ . Poichè  $i$  assume ogni possibile valore le stringhe  $w$  vengono esaminate tutte e poichè  $j$  è finito se  $w$  è in  $L$  allora  $E$   $j$  tale che  $M$  accetta  
 $w$  in  $j$  passi ma se  $w$  non in  $L$ ,  $M$  si ferma senza accettare.  
 $L$  deve essere ricorsivo

Stringe acc da  $M$  con  $n$  stati è  
 1) non vuoto se  $M$  accetta almeno una stringa di lunghezza  $< n$   
 2) infinito se  $M$  accetta una qualche stringa di lunghezza tra  $n$  e  $2n$   
 1) (solo se)  $|w| < n$  accettata  $L(M) \neq \emptyset$   
 (se)  $w$  stringa + piccola, per  $PL$   $|w| < n$  altrimenti sarebbe  $xy^kz$  con  $k=0$  potrei averne una + piccola.  
 2) (solo se) vale  $PL$  quindi  $L$  infinito  
 (se)  $L$  è infinito  $E$   $|w| \leq n a < 2n$  cvd  $b > 2n$  prendo la più piccola, per  $PL$   $w=xy^kz$  con  $k=0$   $xz$  in  $L$   $i$   $j$   $s e > 2n$  non era la più corta.  $i$   $j$   $s e < 2n$  falsa  $b$ )