

BioIMMAGINI

0. Intro

Mappe: per emissione spontanea (ECG, EEG, Elettromiografia); Proiezioni: per interazione con energia (X-Ray, MRI, Ecografia); Tomografie: per interazione con liquidi di contrasto (PET, SPECT, Scintigrafia)

Radiazione elettromagnetica: onde sinusoidali che si propagano con diversa lunghezza d'onda o corrente di particelle di massa zero che viaggiano a 'c' seguendo una certa forma d'onda.

$L=c/v$ $E=hv$: l'energia è proporzionale alla frequenza.

Elaborazione numerica: low-level se output è immagine; mid-level: se output sono attributi estratti dall'input; high-level se si riconoscono gli oggetti e si vuole dare loro un significato (CV).

1. Sistema visivo Umano

Non è possibile distinguere un oggetto di dimensioni più piccole della lunghezza delle onde utilizzate.

Contrasto = $(v.\text{medio}(\text{oggetto}) - v.\text{medio}(\text{sfondo})) / v.\text{medio}(\text{sfondo})$

La differenza appena percettibile aumenta all'aumentare dell'intensità. => Il rumore è più visibile nelle regioni più scure

Modello immagine = illuminazione * riflettanza. Dimensione $M * N * k$ con 2^k livelli di grigio.

4-neighbors; D-neighbors (4 in diagonale), 8-neighbors (4+D)

Adiacenze tra pixel p e q con valori di grigio in V

4-adiacency (q in 4p); 8-adiacency (q in 8p); m-adiacency (in 4 or (in D and (4p intersecato 4q non ha pixel con valori in V)))

2. Elaborazione numerica dell'immagine

Miglioramento immagine.

Dominio spaziale: operatori puntuali, trasformazioni livelli di grigio, $s = \sqrt{255r}$

schiarisce; $s = r^{1/2} / 255$ scurisce, $s = b * \log(a * r + 1)$ schiarisce regioni scure x Fourier, $s = b(e^a * r - 1)$ scurisce le chiare.

STIRAMENTO da $[r_1, r_2]$ a $[0, 255]$: 0 per $r < r_1$; $255 * (r - r_1) / (r_2 - r_1)$ per $[r_1, r_2]$; 255 per $r > r_2$

Stiramento lineare a tratti: $g(f) = (f - f_k) / (f_{k+1} - f_k) * (g_{k+1} - g_k) + g_k$ per $f_k < f <= f_{k+1}$ con $k=0, 1, \dots, K-1$ e condizioni iniziali input f_k e output g_k con K segmenti.

ISTOGRAMMA per ogni valore di grigio c'è un numero di pixel che hanno quel valore. Ad ogni immagine corrisponde un solo istogramma ma non viceversa.

Un istogramma di un'immagine numerica MN normalizzato è dato dalla stima della probabilità di occorrenza del livello di grigio r_k nell'immagine: $p(r_k) = n_k / MN$ con $n_k = \# \text{pixel con valore } r_k$.

Istogramma è base per tecniche di elaborazione nel dominio spaziale.

EQUALIZZAZIONE, distribuisce uniformemente i livelli: aumenta contrasto.

L'equalizzazione si otterrebbe con infiniti livelli di grigio, in discreto ci saranno dei buchi.

Essendo un'operazione puntuale sarà nella forma $s = T(r)$ in modo che la probabilità iniziale $p(r)$ diventi $p(s) = C$ costante. Con la condizione che l'area si conserva si ha $p(r)dr = p(s)ds = Cds$

$ds/dr = (1/C)p(r)$ quindi $s = T(r) = 1/C \int_0^r p(w)dw$

In realtà siamo sul discreto ed essendo normalizzato $C = 1/255$ quindi $s_k = T(r_k) = 255 \text{Sum}(n_i / MN)$

sui k livelli. A questo punto sorge il problema del miglioramento dei dettagli in piccole aree e bisogna definire la funzione di equalizzazione in un intorno per il miglioramento locale.

Media = Sum sui livelli di grigio "i" di $r_i * p(r_i)$ con $p(r_i)$ componente dell'istogramma corrispondente all'i-esimo valore di r è il valor medio dei valori di grigio; Varianza = $\text{Sum}(r_i - m)^2 * p(r_i)$ è la misura del contrasto medio.

0. Confronto medio locale m_{sxy} con il medio globale m_g .

1. Se $m_{sxy} <= k_0 * m_g$ con $0 < k_0 < 1$ allora (x,y) deve essere elaborato

2. Misuro se sxy ha un basso contrasto o no: $\sigma_{sxy} <= k_2 * Dg$ con $0 < k_2 < 1$ se l'area è scura, > 1 se chiara, allora (x,y) deve essere elaborato.

3. Limite il minimo valore di contrasto che accetto altrimenti si tenta di migliorare aree costanti:
 $k_1 * Dg \leq \sigma_{sxy}$ con $k_1 < k_2$

4. Il pixel (x,y) viene moltiplicato per E

OPERATORI DUALI tra più immagini. Media immagini per ridurre il rumore: la varianza dell'immagine media di k immagini è minore di un fattore k della varianza dell'immagine di partenza.

Varianza_Gerrore = $E[(1/K \sum n_i(x,y))^2] = 1/K^2 * \sum E[n_i^2(x,y)] = \text{varianza_Serrore}/K$ con n errore a media zero dell'i-esima immagine.

Moltiplicazione serve per la ROI.

3. DSA

Angiografia digitale sottrattiva 1984 da Kruger e Riederer: (cancellazione sfondo 1934) acquisizione immagine maschera, iniezione contrasto, acquisizione immagine live, sottrazione della maschera alla live. Via venosa al posto di arteriale che richiedeva > liquido per >SNR e pericolosa x allergia, diametro catetere e movimento per disagio.

SOTTRAZIONE TEMPORALE: acquisizione prima e dopo di molte immagini e media per rumore e movimento. (cancella ossa e tessuti, usa contrasto, sensibile al movimento, facile, toglie rumore, alto SNR) Immagini cardiache il movimento cuore è artefatto ho 128 img maschera a 30fps mediate.

SOTTRAZIONE AD ENERGIA DUALE: (1976 Alvarez e Macovski) si basa sul fatto che k. attenuazione materiali diminuiscono all'aumentare dell'energia in modo diverso. K. muscolo decresce più lentamente di k. osso; acq. Con raggi X monoenergetici 80keV e a 120keV il livello di grigio dei tessuti è uguale, sottrazione: =no tessuti molli, senza liquido di contrasto, no movimento. Sorgenti X convenzionali con leggero filtraggio. Scatter alto ad alta energia, eliminabile con collimazione fascio

SOTTRAZIONE AD ENERGIA DUALE A GRADINO K: (1973 Mistretta et al) il k. iodio presenta discontinuità (k-edge) a 33keV, quindi acq. a 32keV e a 34keV acqua, e osso uguali mentre iodio diverso, sottraggo=solo iodio. (cancellazione selettiva, non contrasto, bene movimento, complessa, male rumore, medio SNR). Serve sincrotrone oppure filtri ma serve terza sorgente molto sopra al K-edge.

Utilizzabile solo se K-edge è nel range di keV diagnostici (30-300) iodio e bario. Scatter eliminabile.

SOTTRAZIONE IBRIDA (fatta per DSA) la duale complessa e ho scatter. Più movimento in tessuti rispetto a ossa quindi sottrazione duale prima e dopo il contrasto per eliminare i tessuti, temporale x eliminare ossa.

(LowenergyMask-HighenergyMask) = BoneMask -> iniezione -> (LowenergyContrast-HighenergyContrast) = BoneContrast -> (BoneMask- BoneContrast) = Iodio Rimuove anche scatter Usato x carotide dove una biforcazione nascosta da artefatti di deglutizione. (cancella ossa e tessuti, contrasto, bene movimento, complessa, bene rumore, basso SNR minore di fattore 2 o 3)

5. Operatori locali (dominio spaziale)

Filtri spaziali per enhancement e segmentation. Ogni pixel di g è determinato da intorno Sxy di f. Lineare 3x3 $g(x,y) = w(-1,-1)f(x-1,y-1) + w(-1,0)f(x-1,y)$ ecc.. con W maschera pesi.

Rumore uniforme di quantizzazione, Gaussiano termico, sale e pepe.

MEDIA MOBILE: W costante 1/mn, riduce il rumore ma sfoca; $g(x,y) = \sum_{s=-a}^a \sum_{t=-b}^b w(s,t) f(x+s,y+t)$ Correlazione $g=w$ o f Convoluzione uguale ma con segno meno.

Media pesata: W con maggior peso a punto centrale x 1/somma_valori

MEDIANO: assegna il valore mediano dei pixel dell'intorno al pixel centrale, toglie sale e pepe. Se la somma totale è 1 le regioni costanti restano inalterate. Sui bordi, zero padding, cloning o convoluzione circolare.

6. Operatori differenziali

Arricchiscono i bordi ma aumentano il rumore.

Derivate approssimate a differenze $f(x+1)-f(x)$ e $f(x+1)+f(x-1)-2f(x)$

DERIVATA PRIMA: gradiente(contorni spessi, risposta a rampa, approssimato $df=[f(x,y)-f(x-1,y); f(x,y)-f(x,y-1)]$) Velocità variazione nella direzione del vettore è data dal modulo $|df|$ =approssimato in $|G_x|+|G_y|$ non isotropico e la direzione da fase $\tan^{-1}(G_y/G_x)$. A seconda di come approssimo G_x, G_y ho più semplice $G_x[-1;1]$ e $G_y[-1 1]$
Roberts $[-1 0;0 1]$ $[0 -1;1 0]$ sensibile al rumore, ordine pari difficile non simmetrico;
Prewitt $[-1 -1 -1; 0 0 0; 1 1 1]$ e $[-1 0 1;-1 0 1;-1 0 1]$, direzione bordo;
Sobel $[-1 -2 -1;0 0 0; 1 2 1]$ e $[-1 0 1;-2 0 2;-1 0 1]$, molto usato $G_{sobel}=\max(|G_x|,|G_y|)$;
 Sempre a somma nulla.

DERIVATA SECONDA: è non lineare non isotropica e molto pesante. laplaciano(contorni fini, risposta al dettaglio fine, accentuano il rumore;prefiltraggio, doppio contorno con gradino). Isotropico e lineare. $L=f''_{xx}+f''_{yy}$, gli zeri del laplaciano coincidono con la d'' se la variazione di luminosità lungo il bordo è nulla o al più lineare.Approssimato: $[0 1 0; 1 -4 1; 0 1 0]$. Invariate a rotazioni di 90. Più sensibile al rumore del gradiente=prefiltraggio
 La convoluzione di una maschera a somma 0, anche l'immagine risultante ha somma 0: bisogna scalarla.

Miglioramento sommando l'immagine alla laplaciana (sottraendo se il k.centrale è negativo)
FILTRO NOTCH: per eliminare interferenze periodiche: sovrascrive un valore della trasformata.
FILTRO GAUSSIANO: $1/(2*\pi*\sigma^2)*e^{-((x^2+y^2)/2\sigma^2)}$ per prefiltrare
FILTRO LOG: $d''G=\text{mexicanHat}$: essendo lineare equivale a fare uno smoothing gaussiano e poi applicare il laplaciano al risultato. $[(x^2+y^2-2\sigma^2)/\sigma^4]*e^{-((x^2+y^2)/2\sigma^2)}$
HIGH-BOOST-FILTERING: $Af(x,y)+d''f(x,y)$. se $A=1$ è laplaciano, $A>1$ utile per schiarire.
ESEMPIO: accentuo dettaglio fine con Laplaciano -1 e 8 al centro; sommo due immagini per sharpen e sfondo corretto; Sobel e filtro medio e riscalo; prodotto con laplaciano corretto; somma con originale. La procedura non influenza il range di livelli di grigio che può essere elaborato $s=r^{0.5}$

7. Dominio delle frequenze

La trasformata di Fourier 2D di una $f(x,y)$ reale è una f complessa che descrive ampiezza e fase delle componenti armoniche spaziali (u,v) $\int \int f(x,y)e^{-j2\pi(xu+yu)}dx dy$
 Discreta $1/MNSUMSUM$ di $f(x,y)e^{-j2\pi(xu/M+yu/N)}$ Operatore globale.

Teorema di convoluzione $g=f \text{ conv } h$ $G=F*H$

SHANNON: $u_c \Rightarrow 2u_{max}$ e $v_c \Rightarrow 2v_{max}$; funzione continua ottenuta filtrando i campioni con filtro passa basso $u_{taglio}=u_c/2$ e $v_{taglio}=v_c/2$ però la banda non è limitata quindi bisogna prefiltrare per evitare l'aliasing.

A comb.lineari nello spazio corrispondono comb. lineari in frequenza: centramento.

Step filtraggio: multiplico ingresso $(-1)^{(x+y)}$ per centrare; DFT immagine; moltiplica per filtro H ; DFT^{-1} ; moltiplicare la parte reale per $(-1)^{(x+y)}$.

DFT va schiarita con $s=\log(1+r)$. Lineare. Va centrata $F(u-M/2, v-N/2)$ e poi rishiftata. $F(0,0)$ è la media. Correlazione $F^*(u,v)H(u,v)$ usata per matching. $u_c \geq 2u_{max}$ shannon quindi passabasso. Tutti i filtri lineari nello spazio sono moltiplicazioni in frequenza.

FILTRO NOTCH, pongo a 0 il valore medio per eliminare interferenze.

Ringing dovuto a passabasso ideale (rect->sinc)

LP-GAUSSIANO: $H=e^{-(D^2(u,v)/2D0^2)}$ $D0=f$ taglio dipende dall'ordine essendo σ .

LP-BUTTERWORTH: $H=1/1+(D(u,v)/D0)^{2n}$ meglio del gaussiano dove σ è la f di taglio, perché la f di taglio $D0$ è indipendente dall'ordine del filtro.e pendenza regolata dall'ordine. con $n=2$ approssima il gaussiano, $n>10$ ringing approx ideale. $H=0.5$ in $D(u,v)=D0$

HP-GAUSSIANO: $H=1-e^{-(D^2(u,v)/2D0^2)}$ $\sigma=f$ taglio

HP-BUTTERWORTH: $H=1/1+(D0/D(u,v))^{2n}$

LAPLACIANO in frequenza: $H=-4\pi^2(u^2+v^2)$ $d''f=-[(u-M/2)^2+(v-N/2)^2]F(u,v)$ centrato

In frequenza i valori non sono confrontabili e quindi si deve normalizzare la f e dividere L per il suo max in modo che assuma $[-1,1]$

$H_{hp}=1-H_{lp}$; $H_{hb}=(A-1)+H_{hp}$; $H_{hfe}=a+bH_{hp}$ per accentuare il contributo delle alte frequenze (b regola il contributo, a rende diverso da 0 il valor medio del filtro passa alto)

OMOMORFO: modello illuminazione (lente variazioni spaziali; basse frequenze FT del log dell'immagine)-riflettanza (caratteristiche oggetto varia bruscamente, alte frequenze). Comprime il range livelli di grigio e aumenta il contrasto. $H=(gh-gl)[1-e^{-(c(D^2(u,v)/Do^2))}]+gl$ se $gl<1$ e $gh>1$ amplifica riflettanza con $g=\gamma$.

8. Operatori morfologici

Operatori del dominio spaziale, basati sulla teoria degli insiemi, immagini binarie.

DILATION: insieme di punti z tali che quando B^* è traslato di questi punti almeno un punto di B^* è incluso in A ; $A(+B)=\{z|B_z \wedge A \neq \emptyset\}$ se scala di grigi tipo convoluzione: massimo di $(f+b)$ in intorno di f definito da b .

EROSION: $A(-B)=\{z|B$ è contenuto in $A\}$ insieme punti z tali che quando B è traslato di questi punti ogni punto di B è contenuto in A ; se scala di grigi tipo correlazione: minimo $(f-b)$ in intorno di f definito da b . Operazioni sono duali $(A(-B))^c=A^c(+B)$

OPENING: erosion+dilation; in grigi rimuove i dettagli piccoli e chiari $\bigcup\{B_z|B_z \text{ in } A\}$

CLOSING: dilation+erosion; in grigi rimuove i dettagli piccoli e chiari. $\{x| \text{per ogni } B_z \text{ e } x \text{ in } B_z : B_z \wedge A \neq \emptyset\}$ Duali.

$A \circ B$ è sottoinsieme di A ; se C è sott. di D allora $C \circ B$ è sott. di $D \circ B$; $(A \circ B) \circ B = A \circ B$

A è sott. di $A \circ B$; se C è sott. di D allora $C \circ B$ è sott. di $D \circ B$; $(A \circ B) \circ B = A \circ B$

Rimuovere il rumore Erosion \rightarrow Opening \rightarrow Dilation \rightarrow Closing $[(A \circ B) + B] - B = (A \circ B) \circ B$

HIT-OR-MISS per shape detection oggetto X e finestra W poco più grande di X : $A(x)B = \text{Aeroso}X$ intersecato ($\neg \text{Aeroso}(W-X)$)

ESTRAZIONE BORDI: $A - (\text{Aeroso}B)$

REGION FILLING: inizia da p dentro il contorno, sia assegna 1 a p e applica $X_k = (X_{k-1} (+)B) \wedge A$ con $X_0 = p$.

THICKENING $A \cup (A(x)B)$

Per I livelli di grigio sono funzioni che assegnano ad ogni punto (x,y) un livello di grigio.

DILATION $(f(+b)(s,t)) \max\{f(s-x,t-y)+b(x,y)|(s-x),(t-y) \text{ in } D_f; (x,y) \text{ in } D_b\}$ Con $D = \text{Dominio}$.

Tipo convoluzione, sceglie il valore max di $f+b$ in un intorno di f definito da b . +Luminosa, dettagli scuri ridotti o eliminati.

EROSION $(f(-b)(s,t)) \min\{f(s+x,t+y)-b(x,y)|(s+x),(t+y) \text{ in } D_f; (x,y) \text{ in } D_b\}$

Tipo correlazione, sceglie il valore min di $f-b$ in un intorno di f definito da b . -Luminosa, dettagli chiari ridotti o eliminati.

OPENING(CLOSING) rimuove dettagli piccoli e chiari (scuri), lasciando inalterato il resto.

MORPH-SMOOTHING: opening+closing, riduce i dettagli chiari e scuri ed il rumore senza sfocare i bordi.

MORPH-GRADIENT: dilation-erosion dipende meno dalla direzione del bordo.

TOP-HAT-TRANSFORMATION: f -opening, migliora il dettaglio in presenza di ombra.

TEXTURAL SEGMENTATION: closing x eliminare una regione, opening per uniformare l'altra e morph-gradient per bordo tra due regioni.

9. Segmentazione

Basati su discontinuità (contorni) e similarità (regioni). Procedure di linking per discontinuità spurie.

EDGE LINKING: un pixel x,y di bordo se $|\text{Grad}f(x,y) - \text{Grad}f(x_0,y_0)| \leq \text{soglia}$ e $|a(x,y) - a(x_0,y_0)| \leq \text{sogli}$ angolare allora x_0,y_0 è di bordo. Prima su tutte le linee verticali, poi su tutte le orizzontali con $E=25$ e $A=15^\circ$

TRASFORMATA DI HOUGH: 1962 permette il riconoscimento automatico di configurazioni e si basa sulla trasformazioni di pixel in punti nello spazio dei parametri. Op Globale. Non risente del rumore. Eq retta $y=ax+b$ diventa un punto (a,b) nello spazio dei parametri. Un punto (x,y) nell'immagine diventa una retta nello spazio dei parametri $b=-xa+y$. Due punti nell'immagine formeranno quindi due rette nello spazio di Hough il cui punto di intersezione (a,b) identifica la

retta $y=ax+b$ nell'immagine su cui i punti giacciono. A causa del rumore si potranno avere disallineamenti.

Algoritmo: 1) divido gli assi ab in intervalli e ho le celle di accumulazione $A(i,j)=0$ 2) per ogni punto k pongo a uguale ad ogni possibile valore nell'asse a e calcolo b con $b=-x_k*a+y_k$ e arrotondo b 3) se a_p da come risultato b_q incremento il valore $A(p,q)$.

Le celle che contengono numeri elevati corrispondono a punti collineari. Se più rette uso massimi locali. Problema con linee verticali risolvo usando la forma polare.

Trasforma il problema di riconoscimento di forme in intersezioni di forme; rette in forma polare $r=x\cos(a)+y\sin(a)$ spazio parametri r e a . Sistema di voto quantizzato

Best Fit Line: dato insieme di punti calcolo la retta che ci passa più vicino possibile $\min \sum (y_i - (mx_i + q))^2$ e passa per il baricentro dell'insieme, posso ruotare il sistema di riferimento assunto che la BFL passi per l'origine. $S = (\sum x_i^2 \sum y_i^2 - (\sum x_i y_i)^2)$ per determinare n trovo l'autovettore corrispondente all'autovalore più piccolo di s e la BFL è ortogonale a n . $u = A^ y$ con A^* pseudo-inversa*

THRESHOLDING: se sfondo scuro e oggetto chiaro ho istogramma bimodale e cerco punto di intersezione. Calcolo automatico soglia: To livello medio, calcolare livelli medi dei due gruppi risultanti e una nuova soglia $T=(m_1+m_2)/2$ e iterare fino a differenza di T piccola. Soglia adattativa: divisione in sottoimmagini, algoritmo soglia su quelle che hanno bordo (varianza < 75) e quelle omogenee invariate. Bimodale: fitting con gaussiane e minimi quadrati per stimare le densità di probabilità dei livelli di grigio, non facile analiticamente. Posso suddividere l'immagine e scartare le regioni con istogrammi unimodali, poi fitto ai minimi quadrati e calcolo la soglia, trasformo in immagine binaria se sopra soglia, interpolando le regioni non calcolate e calcolo il gradiente per avere i bordi. Per migliorare posso considerare solo i pixel vicini ai bordi per avere picchi alti uguali; con la stessa probabilità che sia sfondo o oggetto e che soddisfano una misura basata sul laplaciano o grad. per avere separabilità.

REGION GROWING: in immagini rumorose funziona meglio ma più lente. Seed e aggiunti vicini con criterio di similitudine (descrittori + adiacenza). Problema scelta iniziale, criterio di similitudine dipende dal tipo di immagini, criterio di arresto. Esempio saldatura, seme in pixel 255, criterio 1 differenza livelli di grigio tra pixel e seme < 65 (analisi istogramma: differenza tra 255 e primo minimo), criterio 2 pixel 8-connesso.

***Splitting-merging:** suddivisione in regioni disgiunte e unione in base al criterio di similitudine.

***Watersheds:** di un minimo sono l'insieme di posti da cui una goccia cadrà sicuramente su un punto di minimo, e gli spartiacque sono i punti in cui una goccia può cadere con la stessa probabilità di due watershed. Immagine topografica, dighe con dilation iterativa ai pixel connessi con i bacini di partenza, se due bacini si connettono si costruisce diga con il $\max+1$ valore di pixel in modo che siano componenti connesse. Problema se rumore: pre-sfoco, marker in regioni interessanti, postelaborando con merge e criterio di omogeneità su bordo o su profondità della valle.

Problema sovrasedgmentazione risolto con markers che introducono conoscenza a priori, applico algoritmo con condizione che i markers interni (regioni connesse omogenee) siano le uniche possibili regioni di minimo. I markers possono essere anche "natural seed" (cellula con nucleo segmentato facilmente a soglia).

10. Rappresentazione immagini

Dopo aver segmentato non si può basarsi sulla rappresentazione in pixel perché ridondante.

Schema di rappresentazione basato su caratteristiche esterne (contorni, signatures, appr. poligonale); caratteristiche interne (prop. regione, colore, texture).

POLIGONI di perimetro minimo: racchiudo il contorno in celle e "trio" in modo che approssima quello originale secondo la geometria definita dalle celle con errore $\max \sqrt{2d}$ con d distanza min tra 2 pixel. Richiede molto tempo di calcolo.

SPLITTING: suddivisione successiva di un segmento fino a che non soddisfa un criterio. Esempio: dist. max dal segmento di contorno alla linea che unisce i suoi due punti finali sia minore di una soglia, se è maggiore il punto del contorno diventa un vertice e divide in due il segmento.

SIGNATURES: rappr. Monodimensionale del contorno. Esempio: andamento distanza punti dal baricentro usata perché invariante a traslazioni e poco sensibile a rotazioni e scalature normalizzando.

DESCRITTORI BASATI SUL CONTORNO: lunghezza($\sqrt{2}$ pixel diagonali, 1 gli altri); diametro($\max d(P_i, P_j)$ con P punti sul contorno); asse maggiore (contiene diametro), asse minore (perpend. asse maggiore e lungo come rettangolo che contiene il contorno), eccentricità (rapporto dei due);

FOURIER: dato un contorno e P_0 sul contorno sia $P_k = (x_k, y_k)$ sequenza che si ottiene attraversando il contorno da P_0 : si assume y come asse immaginario e la sequenza di numeri complessi $s(k) = x_k + jy_k$ con $k=0, 1, \dots, K-1$. Si applica la DFT $a(u) = 1/K \sum s(k) e^{-j2\pi u k/K}$ $u=0, \dots, K-1$, $a(u)$ sono i descrittori di Fourier. Per riottenere la sequenza si antitrasforma $s(k) = \sum a(u) e^{j2\pi u k/K}$ perdita di dettagli ad alta frequenza. Però non direttamente invarianti a rotazioni e traslazioni ma si possono predire essendo DFT. Considerando meno descrittori si approssima l'oggetto con smoothing.

MOMENTI STATICI: media, varianza e ordine maggiore ma di solito bastano i primi.

DESCRITTORI REGIONALI: Area (e perimetro) usati se sono invarianti, altrimenti:

*Compattezza = $4\pi A/P^2$; *Media e Mediano livelli di grigio, *Min Max livelli grigio, #pixel valore sopra o sotto la media;

*Momenti geometrici: di ordine $p+q$ di $f(x,y)$ è $m_{pq} = \sum_x \sum_y x^p y^q f(x,y)$ fornisce info su come sono distribuiti i punti all'interno dell'oggetto. Per $p=q=0$ ho l'area. Con momenti di ordine 1 si individuano le coordinate del centroide $x_c = m_{10}/m_{00}$; $y_c = m_{01}/m_{00}$. Con origine nel centroide ho i momenti centrali invarianti alla traslazione: $n_{pq} = \sum_x \sum_y (x-x_c)^p (y-y_c)^q f(x,y)$ ho $n_{00} = m_{00}$ e $n_{01} = n_{10} = 0$ ma quelli di secondo ordine sono usati per definire gli assi principali (approssimazione image-ellipse) Per invarianza a scala vanno normalizzati. E da 2 e 3 ordine si possono calcolare 7 momenti invarianti a traslazione, rotazione e scala.

Obiettivo catturare differenze tra immagini mantenendo invarianti orientazione, scala, ecc..

11. Contorni attivi

Per descrivere i contorni anatomici con accuratezza ed efficienza. Problema per limitatezza dati, variabilità e complessità forme anatomiche. Rumore, aliasing ecc provocano contorni indistinguibili e disconnessi. Approccio modello-dipendente che sfrutta info note apriori. Modelli deformabili basati su geometria, fisica, ottimizzazione. (1987 Kass e 88 Terzopoulos)

Curve elastiche che cominciano a deformarsi da un punti iniziale (rest shape) per adattarsi all'oggetto, spline ad energia minima con forze interne che agiscono per non avere discontinuità e energia di deformazione monotona. In base all'oggetto viene fornita un'energia potenziale esterna che attraggono lo snake.

Spline iniziale su immagine e minimizzo energia, minimi locali = proprietà desiderate immagine, comportamento dinamico sempre minimizzando il funzionale di energia.

Snakes Vs Modelli: Fisica + Geometria - Geometria; Attivi - Passivi; Dinamici - Cinetici; Param. Distribuiti - Concentrati; Ampio Dominio Applicabilità - Limitato.

PROBLEMI: minimizzazione energia, inizializzazione, parametrizzazione, convergenza e stabilità, determ. param. elastici, degenerazione forma e costo computazionale.

APPLICAZIONI: Segmentation, 3D reconstruction, tracking, elastic matching, object recognition, registration, autobuilding of atlases, motion recovering.

SNAKES è una curva parametrica $u(s) = (x(s), y(s))$ con s in $[0, 1]$ lunghezza normalizzata dell'arco lungo il contorno. È Associato un funzionale $E^*_{snake}(u) = \int_0^1 \text{Integrale}_{snake}(u(s)) ds$ tra 0 e 1 scomponibile in $\text{Integrale}_{E_int} + \text{Integrale}_{E_ext} + \text{Integrale}_{E_vincoli}$.

$E_{int} = \alpha(s) |du/ds|^2 + \beta(s) |d^2u/ds^2|^2$ con α = elasticità e β = rigidità. Penalizza allungarsi e raggomitolarsi della curva. $E_{vincoli}$ per conoscenza apriori.

$E_{ext} = w_{linea} * E_{linea} + w_{edge} * E_{edge}$ con $E_{linea} = \text{Intensità}(x,y)$ attrae snake a scuro o chiaro a secondo a w_{linea} . $E_{edge} = -|\Delta I(x,y)|^2$ attrae snake a contorni con alto valore del gradiente.

Il funzionale da minimizzare è $E_{snake}=E_{int}+E_{ext}=E_{int}+P(u)$ e lo snake deve soddisfare $-d/ds*(alpha(s)du/ds)+d^2/d^2s*(beta(s)d^2u/d^2s)+dE_{ext}(u(s))=0$

Soluzione complessa, con Programmazione dinamica o reti neurali, instabilità numerica.

L'utente disegna un contorno approssimato e inizia la simulazione dinamica fino ad equilibrio.

SNAKES DINAMICI anche movimento nel tempo per movimenti non rigidi. $u(s,t)=(x(s,t),y(s,t))$ con densità di massa $m_i(s)$ e densità di smorzamento $\gamma(s)$. Funzionale da minimizzare:

$m_i*d^2u/dt^2(F.inerzia)+\gamma*du/dt(F.smorzamento)-$

$d/ds*(alpha(s)du/ds)+d^2/d^2s*(beta(s)d^2u/d^2s)+dP(u(s,t))=0$

SPLINES: di ordine d è una f. polinomiale costante a tratti (segmenti polinomiale concatenati o span). Contorni più complessi con ordine maggiore o con più span (meglio). Le curve di spline parametriche $u(s)=(x(s),y(s))$ con x,y spline. B-spline rappr. convenienti di spline: somma pesata di N_b funzioni di base (d polinomi di lunghezza unitaria sull'asse x) $x(s)=\sum w_n*B_n(s)$

Le curve di B-Spline hanno un control point q_n per ogni B_n e la curva è il vettore della somma pesata dei punti di controllo $r(s)=\sum B_n(s)*q_n$ per n tra 0 e N_b . Per vertici si usa un multiple knot.

ACTIVE-SHAPE-MODEL introduce modello atteso oggetto con training set.

BALOONS stessa cosa in 3D.

12.Registrazione

È il processo di allineamento di immagini in base alla corrispondenze di alcune loro caratteristiche.

Su usa un'immagine fissa (reference) e una targhet che si trasforma con una funzione di trasformazione, fino a farla combaciare sulla fissa.

Problemi di illuminazione diversa, allineamento, movimento, cambio scena...

Bisogna definire la mappa T , suoi parametri incogniti e le corrispondenze incognite: problema chicken-egg. Registrazione monomodale intra-paziente o tra pazienti diversi per atlanti o multimodali.

REG.TRANSFORMATION: smoothing, estrazione bordi,segmentazione,determinazione della relazione tra le caratteristiche e la funzione di trasformazione;

REG.BASIS:selezione delle caratteristiche da usare e definizioni vicoli ed errore;

REG.OPTIMIZATION: stima dei parametri ottimi per la trasformazione;

REG.RESAMPLING: ricampionamento del target a passo uguale.

***TRASFORMAZIONI**: Cambio di coordinate da fisiche a pixel (forma omogenea) $(u;v;1)=(s_x \ 0 \ t_u; \ 0 \ -s_y \ t_v; \ 0 \ 0 \ 1)*(x;y;1)$ Matrici di rotazione $R_x=(1 \ 0 \ 0; \ 0 \ \cos \alpha \ -\sin \alpha; \ 0 \ \sin \alpha \ \cos \alpha)$ $R_x=(\cos \beta \ 0 \ -\sin \beta; \ 0 \ 1 \ 0; \ \sin \beta \ 0 \ \cos \beta)$ $R_z=(\cos \theta \ 0 \ \sin \theta; \ 0 \ \sin \theta \ \cos \theta; \ 0 \ 0 \ 1)$

TRASFORMAZIONI RIGIDE 6 dof Traslazione e rotazione: $T=(R(t_x;t_y;t_z); \ 0 \ 0 \ 0)$

$1)(x;y;z;1)$ con t vettore traslazione. Invarianti: distanze, mappa rette(sup.piane) in rette(sup.piane); angoli non nulli tra rette.

TRASFORMAZIONI AFFINI 12 dof. Traslazione, rotazione e scala: $T=(sR \ t; \ 0 \ 0 \ 0 \ 1)(x;1)$ se s è uguale i rapporti tra distanze sono costanti (7dof), altrimenti shearing: invarianti linee parallele restano parallele. $T=Ax+t$

TRASFORMAZIONI PROIETTIVE $T=(A \ t; \ v^t \ a_{nn})(x;1)$ posizione punto trasformato:

$x'=(Ax+t)/(v^t x+a_{nn})$ non lineari, non vengono mantenute né distanze, né angoli, né parallelismo.

Invarianti: rette in rete, tangenza, complicati rapporti di lunghezze.

***CARATTERISTICHE**: esempio punti di maggior curvatura, o intensità, o markers esterni (non invasivi ma si muovono con la pelle) o interni (fissi ma invasivi).

PROCUSTE: X source, Y target $x'=T(x)=scale*rot*x+trasl$ errore= $T(x)-y=srx+t-y$ si deve s,r,t in modo da minimizzare $\sum w_i^2|srx_i+t-y|^2$ con w_i pesi dei punti che ne misurano l'incertezza.

Algoritmo: $s=1$; calcolo il centroide pesato $x'=\sum w_i^2*x_i/\sum w_i^2$ e y' idem; calcolo la distanza di ogni punto dal centroide $x'_i=x_i-x'$ y'_i idem; calcolo la matrice di covarianza

$Z=\sum w_i^2*x'_i*y'_i$ e SVD $Z=UAV$; calcolo $r=V*diag(1,1,det(VU))*U^t$; calcolo

$s=\sum w_i^2*r*x'_i/y'_i / \sum w_i^2*r*x'_i/x'_i$; calcolo $t=y'-srx'$

FLE(fiducial location error)=spostamento tra marker e la sua locazione anatomica desiderata.

FRE(fid. registration err.)=disallineamento tra punto di riferimento trasformato ed il suo corrispondente, definito da $FRE_i=T(x_i)-y_i$ $FRE^2=(1/N)*\sum w_i^2 * FRE_i^2$ con pesi >0 per diminuire l'influenza di markers meno affidabili.

TRE(target reg.err): errore di registrazione tra punti non usati come marker, errore clinicamente rilevante.

Multimodali: basati su markers(invasivi), su features, trasformazioni rigide.

PrincipalAxesRegistration: calcolo matrice inerzia, centroide, assi principali per orientazione volume 6dof + scala. Uso IPAR per PET e MR visto che la PET è un'immagine parziale.

Registrazione basata su car.geom: veloce, forma chiusa, robusta| markers, segmentazione, invarianti stabili, FLE, usata x monomodali.

SUPERFICI: minimizzare f.distanza= $\sqrt{\sum w_j^2 ||(T(x_j)-y_j)||^2}$ non esiste forma chiusa->metodi iterativi, problema minimi locali. Pro:allinea grande quantità di punti, Contro: identificazione corrispondenze, accuratezza dipende dalla regolarità forma.

(I)PAR(Principal Axes Reg.): immagini multimodali basati su registrazione globale del volume del cervello con trasf.rigida. PAR solo per mono-modali, IPAR per MR+PET.

PAR: matching globale di due volumi globali. $X_g = \sum X * B / B$ è centroide e gli assi principali sono gli autovettori della matrice di inerzia $I = (I_{xx} \ I_{xy} \ I_{xz}; -I_{yx} \ I_{yy} \ -I_{yz}; I_{zx} \ -I_{zy} \ I_{zz})$

Con $I_{xx} = \sum [(y-y_g)^2 + (z-z_g)^2] * B(x,y,z)$; e $I_{xy} = I_{yx} = \sum [(x-x_g) * (y-y_g)] * B(x,y,z)$

Calcolo centroide e traslo nell'origine, gli assi e l'orientazione e ruoto per farli coincidere con gli assi x,y,z. Sessa cosa con V2 e poi scalo V1 per matching con V2 con fattore scala $F = (V1/V2)^{1/3}$

IPAR: usato se field of view di un'immagine funzionale(PET) è più piccolo dell'altro (MR)

DEFORMAZIONI ELASTICHE: riferimento rigido, target elastico; si parte da grosso spostamento e poi si affina. Vincoli smoothing (continuità), incomprimibilità (volume costante).

VANTAGGI: caratteristiche geometriche soluzione in forma chiusa della stima dei parametri, indipendenza dal contenuto(markers);veloce,robusta. LIMITI:Vincoli in

acquisizione(markers),segmentazione richiesta;accuratezza dipendente da FLE.

***OTTIMIZZAZIONE:** insieme features target $G = \{g_i\}$; insieme features reference $F = \{f_i\}$; corrispondenze $C = \{(g_k, f_k)\}$; f.obiettivo= $E(teta;C) = \sum [D(T(g_k;teta), f_k)]^2$ con D=distanza e teta=parametri incogniti della trasformazione.

Determinare le corrispondenze prima della stima dei parametri: richiede una ricca descrizione, facile errori. Determinare contemporaneamente: problema uovo-gallina.

STIMA PARAMETRI: $f_k = (u_k, v_k)$ $g_k = (x_k, y_k)$ $T = (a \ -b; b \ a)$ $g_k + (t_x; t_y)$ $D = ||T \cdot f_k - g_k||$

$F = \sum D^2 = \sum [(a * x_k - b * y_k + t_x - u_k)^2 + (b * x_k + a * y_k + t_y - v_k)^2] = \sum [(a * x_k - b * y_k + t_x - u_k)^2 + (b * x_k + a * y_k + t_y - v_k)^2]$ su (g_k, f_k) in C. Derivo rispetto ad ogni parametro e pongo a zero il vettore gradiente risultante ottenendo 4 eq.lineare in 4 incognite.

ICP(Iterative Closest Points) per calcolare parametri trasformazione: stima iniziale teta_0 a t=0; itero fino a convergenza:

stabilisco le corrispondenze e le considero come insieme di punti anche se non lo erano, applico la trasformazione per una stima fissata teta_t ad ogni punto della caratteristica del target e trovo la caratteristica + vicina sulla reference; stimo i nuovi parametri della trasformazione teta_{t+1} dalle caratteristiche risultanti.

Stima trasformazione iniziale cruciale, convergenza problematica e le corrispondenze possono oscillare tra punti. Per dato insieme C possiamo stimare ai minimi quadrati la corrispondenza ottima MA la trasformazione dipende dalle corrispondenze che quindi andranno ristabilite.

***INTENSITY BASED REG:** usato solo se le due immagini sono diverse solo perché sono disallineate. Usati per registrazioni rigide di proiezioni 2D e 3D mono(multi)-modali intra-paziente in tempi diversi e di non rigide inter e intra-paziente. Per la localizzazione anatomica e correzione in immagini funzionali, diagnostica integrata, ottimizzazione radioterapia, chirurgia guidata...

SSD: si minimizza somma quadrati delle differenze di intensità $\sum [I_f(p) - I_m(p)]^2$ sulla regione di intersezione. Semplice, ottimo per errore gaussiano. $I'_m = I_m(T^{-1}(p;teta))$ quindi la regione dipende dai parametri della trasformazione e se non c'è overlap la somma è zero. Bisogna

interpolare (media pesata di 4 pixel vicini con pesi proporzionali alle distanze, 8 per il 3D) perché la mappa inversa del pixel non coincide sempre con le griglie di riferimento.

Per minimizzarla rispetto ai parametri incogniti uso metodo del gradiente: calcolo $dE(\theta_t) = dE/d\theta_t$ e faccio piccoli cambiamenti nei parametri nella direzione negativa: $\theta_{t+1} = \theta_t - \eta * dE(\theta_t)$ con $\eta = \text{learning rate}$. Rivaluto la f. obiettivo e se è ridotta accetto il cambiamento, altrimenti riduco η . Reitero fino a che non ho più cambiamenti.

Per calcolare la derivata dell'immagine uso differenze su pixel. Se le due immagini differiscono solo per il rumore SSD è ottima misura di similarità.

Intensità Vs geometriche: gradiente buono ma non ottimo e aggiornamento vincolo e iterazione stima; stima minimiquadrati la ottima ma dipende da corrispondenze che andranno ristabilite e iterato.

CROSSCORRELATION: è misura di similarità ideale per monomodali con relazione intensità lineare. $CC = \frac{\sum (I_f(i) - I'_f) * (I_m(i) - I'_m)}{[\sum (I_f(i) - I'_f)^2 * \sum (I_m(i) - I'_m)^2]^{1/2}}$ con i in $I_f \setminus I'_m$ con $I'_m = \text{la trasformata di } I_m$

RIU (Ratio Image Uniformity): determino il numero di voxel N che stanno nell'intersezione delle due immagini; calcolo l'immagine rapporto $R(i) = I'_m(i) / I_f(i)$ e la media $m_r = 1/N * \sum R(i)$ e la deviazione standard $\sigma_r = \sqrt{\sum (R(i) - m_r)^2 / N}$. La funzione costo da minimizzare è $RIU = \sigma_r / m_r$

ENROPIA CONGIUNTA: $H(X, Y) = -\sum_X \sum_Y p(x, y) \log p(x, y)$; l'istogramma congiunto ha in ascissa i valori di grigio di X e in ordinata quelli di Y , ogni valore h nel punto (x, y) è il numero di coppie corrispondenti che hanno il livello di grigio x nella prima immagine e y nella seconda. La stima della probabilità congiunta si ottiene minimizzando l'istogramma. Se le immagini sono allineate i punti sono raggruppati in una regione sottile e circondati da sfondo scuro e cominciano a disperdersi se le immagini non sono allineate bene. Per allinearle bisogna minimizzare H ed è molto sensibile all'overlap.

MUTUA INFORMAZIONE: quando EC diminuisce, la MI aumenta. Devo massimizzare la $I(X, Y) = \sum p(x, y) \log [p(x, y) / p(x)p(y)]$ ma non funziona bene se c'è molto rumore attorno all'oggetto. Normalizzata funziona meglio anche se non ha basi teoriche:

$I(X, Y) = (H(X) + H(Y)) / H(X, Y)$ indipendente dall'overlap.